Banque <<Agro>>
Technologie et Biologie
A - 0604 T

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Dans ce problème a désigne un réel strictement positif et E l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur $[0, a]$. On rappelle que E, muni de l'addition et de la multiplication par un réel usuelles, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Une fonction f de E vérifie la relation $(*)$ si et seulement si :

$(*)$ Il existe un réel A tel que pour tout $x \in [0, a]$, $|f(x)| \leq Ax$.

On note L l'ensemble des fonctions vérifiant la relation $(*)$.

Première Partie.

I.1. Soit f une fonction vérifiant $(*)$; montrer que

I.1.a. $f(0) = 0$

I.1.b. f est continue en 0.

I.2. Montrer que L est un sous-espace vectoriel de E.

I.3. Soit g une fonction, à valeurs réelles, continue et dérivable sur $[0, a]$, de dérivée bornée sur $[0, a]$ et vérifiant $g(0) = 0$. Montrer que g appartient à L.

I.4. Soit h une fonction, à valeurs réelles, continue et bornée sur $[0, a]$; on note y_0 la solution de l'équation différentielle :

$$y'(x) + y(x) = h(x)$$

vérifiant $y_0(0) = 0$.

I.4.a. Exprimer pour tout x réel, $x \in [0, a]$, la valeur de $y_0(x)$ sous forme du produit de e^{-x} par une intégrale qu'on précisera.

I.4.b. Montrer que $y_0 \in L$.

T.S.V.P.

I.5.a. Vérifiez que, pour tout x réel distinct de 1 et pour tout n entier naturel, on a :

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{k=n} x^k.$$

I.5.b. En déduire, d'une part, que pour tout $x \in [0,1[$ et pour tout n entier naturel, on a :

$$\sum_{k=0}^{k=n} x^k \leq \frac{1}{1-x}$$

et, d'autre part, que pour tout $x \in [0,1[$ on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Deuxième Partie.

Soit φ une fonction vérifiant $(*)$ et ne prenant que des valeurs positives ou nulles. On note pour tout $x \in [0,a]$ et pour tout n entier naturel :

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \varphi(\frac{x}{2^k}).$$

II.1.a. Montrer que, pour tout $x \in [0,a]$, la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

II.1.b. En déduire que, pour tout $x \in [0,a]$, la suite de terme général $u_n(x)$ converge vers une limite finie, notée $u(x)$.

II.1.c. Montrer que la fonction u définie au II.1.b. appartient à L.

II.2. Soit f une application, à valeurs réelles, définie sur $[0,a]$. On dit que f vérifie la condition $(**)$ si et seulement si :

$(**)$ pour tout x appartemant à l'intervalle $[0,a]$, $f(x) - f(\frac{x}{2}) = \varphi(x)$.

II.2.a. Montrer que u vérifie $(**)$.

II.2.b. Soient f et g deux fonctions vérifiant $(**)$. On note $h = f - g$. Montrer que pour tout $x \in [0,a]$ et pour tout n entier naturel, on a :

$$h(x) = h(\frac{x}{2^n}).$$

II.2.c. Déduire de ce qui précède qu'il existe au plus une fonction continue en 0, vérifiant (**) et prenant en 0 une valeur donnée.

II.2.c. Montrer que si f vérifie (**), alors

$$\forall x \in [0,a], \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(\frac{x}{2^{n+1}}) + \sum_{k=0}^{k=n} \varphi(\frac{x}{2^k}).$$

II.2.d. Montrer qu'il existe une et une seule fonction de L vérifiant la condition (**).

II.3. Soit $\alpha \in [1, +\infty[$. Notons φ_α la fonction définie sur $[0,a]$ par

$$\varphi_\alpha(0) = 0 \text{ et } \forall x \neq 0, \varphi_\alpha(x) = x^\alpha.$$

II.3.a. Montrer que $\varphi_\alpha \in L$ et que φ_α est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

II.3.b. Déterminer l'unique application $f \in L$ vérifiant la condition (**) pour $\varphi = \varphi_\alpha$.

FIN